ژرژ پولیا

دربارهٔ تصویرنگاری•

ترجمهٔ بهزاد منوچهریان

در تصویرنگاری، برای نوشتن "خورشید"، "ماه"، و "درخت"، به‌سادگی یك دایره، یك هلال، و یك تصویر ساده‌شدهٔ مرسوم از درخت می‌کشند. تصویرنگاری را برخی قبایل سرخپوست مورد استفاده قرار می‌داده‌اند و کاملا ممکن است که سیستمهای پیشرفته‌تر نوشتن درهمه‌جا تکامل‌یافتهٔ همین سیستم ابتدایی باشند؛ و بنابراین ممکن است تصویرنگاری منبع اصلی الفبای یونانی، لاتین، گوتیك وحروفی باشدکه امروزه به‌عنوان علائم ریاضی از آنها استفاده می‌شود. امیدوارم‌روزی برسدکه تصویرنگاری بدوی نیزمورد استفاده درریاضیات بیابد. درآنچه‌که ذیلا می‌آید می‌خواهم نشان دهم چگونه روش توابع مولد، که درآنالیز ترکیبی‌مهم است، می‌تواند به‌طورکاملا شهودی از "سریهای شکلی" که جملاتشان تصاویر (ویا به‌بیان دقیقتر، متغیرهایی‌که با تصاویرنشان داده می‌شوند) هستند، نتیجه شود.

استفاده ازتصویرنگاری روی کاغذ یا تخته‌سیاه آسان است، اما برای چاپ، مشکل و گران است. بااینکه محتوای صفحات آتی را به‌دفعات به‌طورشفاهی ارائه‌کرده‌ام، درچاپ آن مردد بودم.

سعی من بر آن است‌که با به‌بحث کشیدن سه‌مثال‌خاص ایدهٔ‌کلی را تشریح‌کنم. اولین آنها، اگرچه از همه‌آسانتر است، بسیار وسیعترمطرح خواهد شد.

۱. به‌چندطریق‌می‌توان یك دلار را خردکرد؟ بیایید این سؤال را تعمیم دهیم. فرض کنید P_n نمایانگر تعداد روشهای پرداخت n سنت برحسب ۵ نوع سکه باشد: یك سنتی،

• Polya, G., "On picture writting," *Amer. Math. Monthly*, **49** (1956) 689-697.

پنج سنتی، ده سنتی، بیست‌وپنج سنتی، و نیم‌دلاری. "روش پرداخت" فقط و فقط وقتی مشخص می‌شود که معلوم باشد از هر نوع سکه چند تا استفاده می‌شود. پس $P_4 = ۱$، $P_5 = ۲$، $P_{10} = ۴$. مناسب است که قرار دهیم $P_0 = ۱$. در مسئله‌ای که ابتدا مطرح کردیم باید P_{100} را حساب کنیم. به‌طور کلی می‌خواهیم ماهیت P_n را بفهمیم و بالاخره شیوه‌ای برای محاسبهٔ آن بیابیم.

در نظر گرفتن امکانهای گوناگون می‌تواند به‌ما کمك کند. ممکن است اصلا از سکهٔ یك سنتی استفاده نکنیم، یا ۱ یك سنتی، یا ۲ یك سنتی، یا ۳ سه‌سنتی، یا... به‌کار بریم. این حالات به‌طور تصویری در اولین سطر شکل ۱ ترسیم شده‌اند؛ "هیچ سنت" با یك مربع، که ما را به یاد گیشهٔ خالی می‌اندازد، نمایش داده شده است. سطر دوم نمایانگر این حالات است: استفاده از هیچ پنج سنتی، ۱ پنج سنتی، ۲ پنج سنتی، ... سه سطر بعد به‌ترتیب امکانات مختلف در نظر گرفتن سکه‌های ده‌سنتی، بیست‌وپنج سنتی، و نیم‌دلاری را نشان می‌دهند. ما باید یکی از تصاویر سطر اول را انتخاب کنیم، سپس یك تصویر از سطر دوم، وهمینطور، با انتخاب تنها یك تصویر از هر سطر و کنار هم قراردادن پنج تصویری که به‌این صورت انتخاب‌شده‌اند، یك طریقهٔ خردکردن را به‌دست آوریم. بنابراین شکل ۱ مستقیماً نمایانگر روشهای گوناگون در نظر گرفتن انواع سکه‌ها، و به‌طور غیرمستقیم نمایانگر تمام طرق خردکردن دلار مطلوب ماست.

شکل ۱. مروری کامل بر روشهای انتخاب.

کشف اصلی درمشاهدهٔ این نکته‌است که درواقع، تصاویر شکل ۱ را براساس قوانین خاص جبری با یکدیگر ترکیب می‌کنیم: اگر هر سطر شکل ۱ را به‌عنوان **مجموع** تصاویری که در آن قرار دارند تصور کنیم و ضرب این پنج مجموع (نامتناهی) را درنظر گیریم، به اختصار اگر از شکل ۱ به‌شکل ۲ گذر کنیم وضرب را انجام دهیم، جملات این حاصلضرب حالات مختلف خردکردن پول راکه مطلوب ماست نشان می‌دهد. یك جملهٔ این حاصلضرب که در سطر آخر شکل ۲ نشان داده شده‌است نمونه‌ای است که نمایانگر یك‌روش خردکردن

یك دلار را نشان می‌دهد (پرداخت هیچ سکهٔ یك سنتی، سه پنـج سنتی، یك ده سنتی، یك بیست و پنج سنتی، ویك نیم‌دلاری). مجموع تمام این گـونه جملات یك سری نامتناهی از تصاویر است. هر تصویر یك طریقهٔ خردکردن پول را نشان می‌دهد، جملات مختلف طرق گوناگون خردکردن‌را نشان می‌دهند، وکل‌سری تصاویر، متناسباً سری شکلی نامیده‌می‌شود، که تمام طرق خردکردن را که باید برای محاسبهٔ P_n درنظر بگیریم، به‌دست می‌دهد.

(□ + (1) + (1)(1) + (1)(1)(1) + • • •) •
(□ + (5) + (5)(5) + (5)(5)(5) + • • •) •
(□ + (10) + (10)(10) + (10)(10)(10) + • • •) •
(□ + (25) + (25)(25) + (25)(25)(25) + • • •) •
(□ + (50) + (50)(50) + (50)(50)(50) + • • •) •
= • • • + □ • (5)(5)(5) • (10) • (25) • (50) + • • •

شکل ۲. پیدایش سری شکلی.

۱۰۱ هنوز این‌گونه برداشت ازشکل ۲ مشکلات گوناگونی به بار می‌آورد. اول اینکه یك مشکل نظری وجود دارد: به‌چه صورت می‌توانیم تصاویررا جمع و ضرب‌کنیم؟ سپس، یك مشکل عملی وجود دارد: چگونه می‌توانیم به‌نحو منـاسب جملاتی راکه مقدار P_n را می‌شمارند، یعنی آنهایی راکه مقدار پرداختی n سنت را مشخص می‌کنند، از سری شکلی انتخاب کنیم؟

اگر تصاویر، یعنی این نشانه‌های نوشتاری بدوی را همان‌گونه به‌کار بریم که حروف الفباهای پیشرفته‌تر را به‌کار می‌بریم، مشکلات نظری کنارمی‌روند: هر تصویر را همچون نمادی برای یك متغیر یا حرف نامعینی در نظر می‌گیریم.

برای فائق آمدن برمشکل دیگر بدیك ایدهٔ اساسی دیگراحتیاج داریم: به‌جای‌هرمتغیر "تصویری" (یعنی متغیری‌که بایك تصویرنشان داده می‌شود) توانی ازیك متغیرجدید مثل x قرار می‌دهیم، که مقدار توان آن مجموع سکه‌هایی است‌که در متغیر تصویری نشان داده شده‌است. جزئیات این مطلب درشکل ۳ آمده است. سطـر شکل ۳ تطابق خوبی را نشان می‌دهد: سه‌سکهٔ پنج سنتی‌کنارهم‌قرارگرفته را به‌عنوان یك تصویر، تصورکرده‌ایم. باتوجه به‌قاعدهٔ عمومی‌ای‌که وضع کردیم، باید برای این متغیر x^{15} را اختیارکنیم؛ بااین‌حال اگر به‌جای هرسکه توان مناسب x آن‌را قرار دهیم و حاصلضرب توانهای کنار هم را درنظر

$$\text{①} = X,\ \text{⑤} = X^5,\ \text{⑩} = X^{10},\ \text{㉕} = X^{25},\ \text{(50)} = X^{50},$$

$$\square = X^0 = 1,\ .$$

$$\text{⑤⑤⑤} = X^5X^5X^5 = X^{15},$$

$$\square\cdot\text{⑤⑤⑤}\cdot\text{⑩}\cdot\text{㉕}\cdot\text{(50)} = X^{100}$$

شکل ۳. توانهای یك متغیر که جایگزین متغیرهایی شده‌اند که با تصویرنشان داده می‌شوند.

بگیریم، باز به‌همان نتیجهٔ x^{15} می‌رسیم.

آخرین سطر شکل ۳ خیلی مهم است. این سطر با یك‌مثال نشان می‌دهد که (سطر آخر شکل ۲ را ببینید) چگونه جایگذاری مزبور روی جملهٔ عمومی سری شکلی اثر می‌گذارد. این جمله حاصلضرب پنج متغیر تصویری است. بدازای هرعامل، توانی از x جایگزین می‌شود که نمای آن برابر مقدار آن عامل (برحسب سنت) است: نمای حاصلضرب از جمع ۵ نما حاصل می‌شود که همان مجموع مقادیر عاملهاست. و بداین ترتیب جایگذاری مذکور درشکل ۳ هرجمله ازسری شکلی را به یك توان x^n مبدل می‌کند. از آنجاکه سری شکلی هرطریق خـردکـردن پول را تنها یك بار نشان می‌دهد. نمای n دقیقاً P_n بار ظاهر می‌شود، یعنی (پس از بازآرایی مناسب جملات) کل سری شکلی بداین صورت درمی‌آید

$$P_0+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n+\cdots \tag{۱}$$

در این سری ضریب x^n تعداد طرق گوناگون خردکردن n سنت را می‌شمارد، و بنابراین (۱) به‌تناسب، سری شمارنده نامیده می‌شود.

جایگذاری مذکـور در شکل ۳، اولین سطر شکل ۲ را به یك سری هندسی مبـدل می‌کند

$$1+x+x^2+\cdots=(1-x)^{-1} \tag{۲}$$

درواقع، این جایگذاری هرکدام از پنج سطر اول شکل ۲ را به یك سری هنـدسی تبدیل می‌کند و معادلهٔ نشان داده‌شده در شکل به این صورت درمی‌آید:

$$(1-x)^{-1}(1-x^{5})^{-1}(1-x^{10})^{-1}(1-x^{25})^{-1}(1-x^{50})^{-1} \quad (۳)$$
$$=P_0+P_1x+P_2x^2+\dots+P_nx^n+\dots$$

اکنون ما در بیان مجموع سری شمارنده موفق شده‌ایم. این‌مجموع معمولاً تابع‌مولد نامیده می‌شود؛ درواقع، این تابع‌که برحسب توانهای x بسط داده شده است، اعداد P_0 ، P_1 ، ...، P_n، ...، را تولید می‌کندکه معنای ترکیبیاتی آنها نقطهٔ آغاز کار ما بود.

۲۰۱ یك مسئلهٔ ترکیبیاتی را به‌مسئله‌ای از نوع دیگر تحویل کرده‌ایم: بسط یك تابع داده شده از x برحسب توانهای x. به ویژه، مسئلهٔ اولیمان دربارهٔ خردکردن یك دلار را به‌مسئلهٔ محاسبهٔ ضریب x^{100} دربسط سمت چپ معادلهٔ (۳) تحویل کرده‌ایم. هدف اصلی‌ما این بود که نشان دهیم چگونه تصویرنگاری می‌تواند برای این تحویل کردن مورد استفاده قرارگیرد. اما باز بگذارید مختصری هم به محاسبات عددی اشاره‌کنیم.

سمت چپ (۳) حاصلضرب پنج عامل است. بسط مشهور عامل اول در معادلهٔ (۲) نشان داده شده‌است. هربار با اضافه‌کردن یك به‌یك عوامل‌متوالی پیش‌می‌رویم. فرض‌کنید مثلا بسط حاصلضرب دوعامل اول را به‌دست‌آورده‌ایم:

$$(1-x)^{-1}(1-x^{5})^{-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

و می‌خواهیم‌کار را برای سه عامل انجام دهیم:

$$(1-x)^{-1}(1-x^{5})^{-1}(1-x^{10})^{-1}=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots$$

نتیجه می‌شود

$$(b_0+b_1x+b_2x^2+\dots)(1-x^{10})=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

با مقایسهٔ ضریب x^n در دوطرف، به‌دست می‌آید

$$b_n=b_{n-10}+a_n \quad (۴)$$

(هرگاه $m<0$ قرار دهید $b_m=0$). به‌کمك معادلهٔ(۴)، اگر a_nها معلوم باشند می‌توانیم به‌طور بازگشتی ضرایب b_n را حساب‌کنیم، وسری (۳) می‌تواند در چهار مرحلهٔ متوالی که هریك شبیه همان است‌که در بالا بحث‌کردیم، از معادلهٔ (۲) به‌دست آید.

درزیر جدولی‌که محاسبهٔ P_{50} را نشان می‌دهد آمده‌است. این جدول ضریب x^n را برای برخی مقادیر n درپنج بسط گوناگون نشان می‌دهد. دربالای هرستون مقدار n آمده است و در ابتدای هرسطر آخرین عامل به حساب می‌آید. درصورت محاسبه، آخرین سطر مقدار P_n را به‌ازای $n=0, 5, 10, \dots, 50$، نشان می‌دهد. جدول تنهاگامهایی راکه برای محاسبهٔ جواب مسئلهٔ اولیه موردنیازاست دربردارد، ونتیجهٔ $P_{50}=50$ را به‌دست‌می‌دهد. یعنی ۵۰ سنت را دقیقاً به ۵۰ طریق متفاوت می‌توان خردکرد، بقیهٔ مطلب را به خواننده

واگذار می‌کنیم تا محاسبه را ادامه دهد و جواب $P_{۱۰۰}$ = ۲۹۲ را به‌دست آورد. همچنین خواننده می‌تواند بکوشد تا این روش محاسبه را مستقیما و بدون توسل به سری شمارنده توجیه کند.

جدول محاسبهٔ $P_{۵۰}$

	$n=$ ۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
$(۱-x)^{-۱}$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$(۱-x^{۵})^{-۱}$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
$(۱-x^{۱۰})^{-۱}$	۱	۲	۴	۶	۹	۱۲	۱۶		۲۵		۳۶
$(۱-x^{۲۵})^{-۱}$	۱					۱۳					۴۹
$(۱-x^{۵۰})^{-۱}$	۱										۵۰

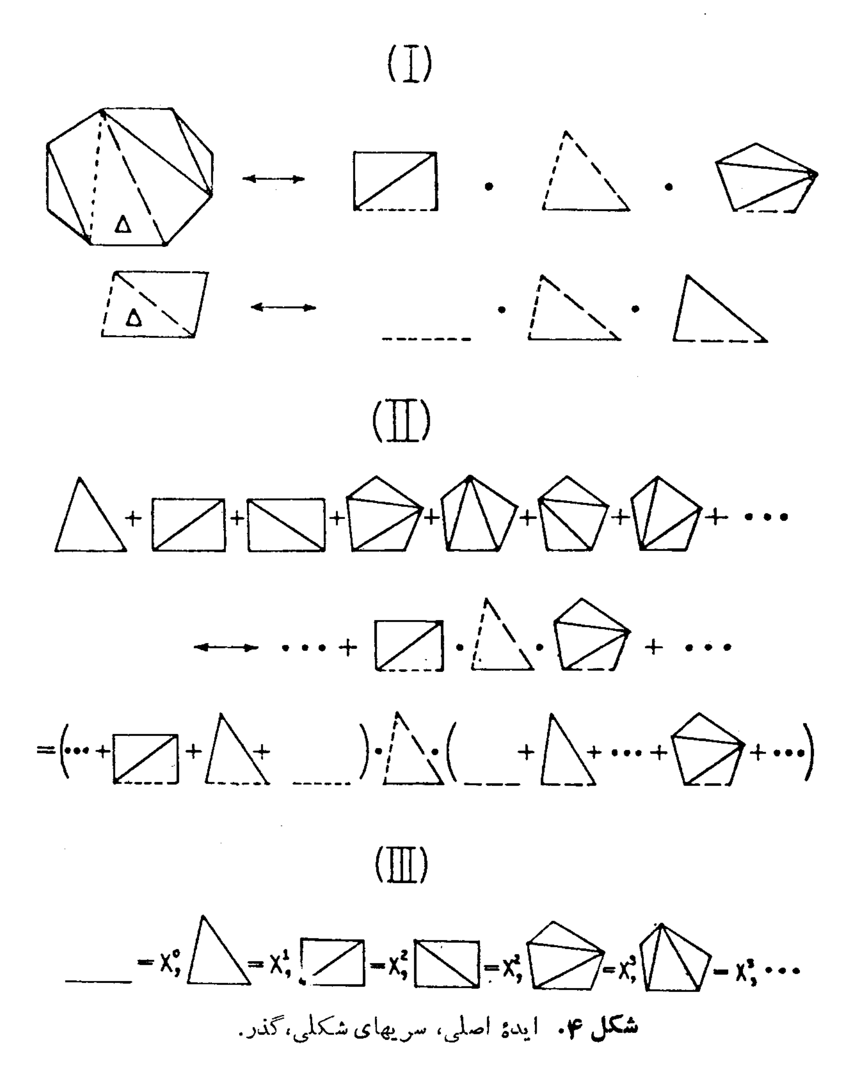
۲. یك n ضلعی محدب را با $n-۳$ قطر به $n-۲$ مثلث تقسیم‌کنید و D_n، تعداد تقسیمات مختلف ازاین نوع، را بیابید. ابتدا بررسی ساده‌ترین حالات خاص به‌درك مسئله کمك می‌کند. به‌سهولت ملاحظه می‌کنیم که $D_{۴}=۲$، $D_{۵}=۵$ والبته $D_{۳}=۱$.

جواب مسئله درقسمتهای (I)، (II)، و (III) شکل ۴ تشریح شده‌است.

قسمت (I) شکل ۴ به‌ایدهٔ اصلی اشاره دارد: تقسیمات هر چندضلعی را که مثلث نباشد از تقسیمات چندضلعیهـای دیگری می‌سازیم که تعداد اضلاعشان کمتر است. به این منظور، روی یکی‌از اضلاع چندضلعی تکیه می‌کنیم، و آن‌را به‌طور افقی درپایین قرار می‌دهیم و آن را پایه می‌نامیم. ضلع یکی‌از مثلثهایی که چند ضلعی به‌آنها تقسیم‌شده، همین پایه‌است؛ این مثلث را Δ می‌نامیم. در چندضلعی داده شده دو چند ضلعی کوچکتر قراردارد، یکی در سمت چپ ودیگری درسمت راست Δ. مثلاً، بالاترین سطرشکل ۴ (I) یك هشت‌ضلعی را نشان می‌دهدکه در آن یك ذوزنقه درسمت چپ و یك پنج ضلعی در سمت راست Δ وجود دارد که به‌نحو مناسبی جدا شده‌اند. همان‌طور کـه شکل نشان می‌دهد، می‌توانیم با شروع از Δ وقراردادن دوچندضلعی ازقبل تقسیم شده به‌طور مناسب در دوطرف آن، تقسیم بعدی هشت‌ضلعی را تولیدکنیم، و می‌توانیم امید داشته‌باشیم که‌این شیوهٔ ساختن تقسیمات سودمندباشد.

با بررسی پیامدهای این ایده، امکان دارد به‌یك مشکل برخورد کنیم: حالتهایی شبیه آنچه در سطردوم شکل ۴ (I) نشان داده شده، وجود داردکه برای آنها چندضلعی جانبی روی یکی‌از اضلاع Δ وجود نـدارد. هنوز می‌توانیم این مشکل را برطرف کنیم: بله، چند ضلعی جانبی روی‌آن ضلع Δ (در حالت نشان داده شده در شکل، ضلع سمت چپ) وجود دارد، اما تبهگون[1] است، چون به یك پاره‌خط تغییرشکل داده‌است.

1. degenerate



شکل ۴. ایدهٔ اصلی، سریهای شکلی، گذر.

قسمت (II) شکل ۴ نحوهٔ پیدایش سریهای شکلی را نشان می‌دهد. این سری، که در سطر اول آمده است، مجموع تمام تقسیمات ممکن چندضلعیهای با ۳، ۴، ۵ و... ضلع است. طبق قسمت (I) (همان‌گونه‌که درسطر بعد یادآوری می‌شود) هرجملهٔ سری شکلی می‌تواند با قراردادن دو چندضلعی از قبل تقسیم‌شده روی مثلث Δ، یکی از چپ و یکی از راست (که یکی یا هردوی‌آنها ممکن است تبهگون باشند)، تولید شود. پس همان‌طورکه‌سطر بعد (آخرین سطر شکل ۴ قسمت (II)) نشان می‌دهد، جملات سری شکلی در تناظر یك به‌یك با بسط حاصلضرب سه‌عامل‌اند: عامل میانی صرفاً یك مثلث است. دوعامل دیگرهمان سری شکلی‌هستندکه‌یك پاره‌خط به‌آن افزوده شده‌است.

۱.۲ قسمت (III) شکل ۴ به‌گذر از سری شکلی به سری شمارنده اشاره دارد. با دنبال‌کردن الگویی که درشکل ۳ و بخش ۱.۱ وضع شده، به‌جای هر تقسیم‌بندی(اگر دقیقتر بگوییم، به‌جای متغیری که توسط آن تقسیم‌بندی نمایش داده شده) توانی را از x می‌گذاریم که نمای آن تعداد مثلثهای تقسیم‌بندی است. این جایگذاری که درشکل ۴ (III) نشان داده شده‌است، سری شکلی را به

$$D_3x + D_4x^2 + D_5x^3 + \dots + D_nx^{n-2} + \dots = E(x) \qquad (5)$$

مبدل می‌کند که در آن $E(x)$ همان سری شمارنده است. رابطه‌ای که درشکل ۴ (II) نشان داده‌شده، به این رابطه تبدیل می‌شود

$$E(x) = x[1 + E(x)]^2 \qquad (6)$$

این یك معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $E(x)$ است که جواب آن عبارت است از

$$E(x) = D_3x + D_4x^2 + D_5x^3 + \dots + D_nx^{n-2} + \dots \qquad (7)$$
$$= \frac{1 - 2x - (1 - 4x)^{1/2}}{2x} = x + 2x^2 + \dots$$

در واقع، برای رسیدن به معادلهٔ (۸)، باید جواب دیگرمعادلهٔ درجهٔ دوم (۶) راکه برای $x = 0$ بینهایت می‌شود، کنار بگذاریم.

۲.۲ مسئلهٔ اصلی خودراکه محاسبهٔ D_n بود به‌مسئله‌ای از نوع دیگر تحویل کرده‌ایم: یافتن ضریب x^{n-2} دربسط تابع (۷) به‌توانهای x. این مسئله یك‌مسئلهٔ عادی‌است که بحث چندانی را نمی‌طلبد. از (۷)، با استفاده ازدستور دوجمله‌ای و تبدیلاتی سرراست به‌دست می‌آوریم که برای $n \geqslant 3$

$$D_n = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n-1}(-4)^{n-1} = \frac{2}{2}\,\frac{6}{3}\,\frac{10}{4}\cdots\frac{4n-10}{n-1}$$

۳. یك درخت (توپولوژیك) یك سیستم همبند متشکل از دو نوع شیٔ خط و نقطه است که شامل هیچ مسیر بسته‌ای نیست. نقطه‌ای از درخت راکه تنها یك‌خط به‌آن می‌رسد ریشهٔ آن‌درخت‌می‌نامیم، وخطی‌راکه از ریشه آغازمی‌شود تنه، وهر نقطه غیر از ریشه راگره می‌نامیم. درشکل ۵ ریشه با یك پیکان وگره با دایره‌ای کوچك نشان داده شده است. مسئلهٔ ما این است: T_n، تعداد درختهای گوناگون با n گره را، حساب کنید.

فرقی نمی‌کندکه خطوط دراز باشند یاکوتاه وراست باشند یا خمیده و برروی کاغذ به‌سمت چپ رسم شده باشند یا به‌سمت راست؛ تنها اختلاف درارتباطات (توپولوژیك) است. آزمایش ساده‌ترین حالات می‌تواند خواننده را در درك نکتهٔ موردنظرمسئله کمك کند؛ به‌آسانی دیده می‌شود که $T_1 = 1$، $T_2 = 1$، $T_3 = 2$، $T_4 = 4$، و $T_5 = 9$.

(I)

(II)

(III)

$\square = x^0$, $= x^1$, $= x^2$, $= x^3$, $= x^3$, $= x^4$, $= x^4$, ...

شکل ۵. ایدهٔ اصلی، سریهای شکلی، گذر.

راه حل درسه‌قسمت شکل ۵ که رده‌بندی کلی آن بسیار شبیه ترکیب شکل ۴ است، نشان داده شده است. خواننده باید سعی کند تنها با نگاه‌کردن به‌شکل ۵ ومشاهدهٔ شباهتهای آشکار آن با شکلهای قبل، راه حل را درك کند؛ خواننده همچنین می‌تواندبه تذکرات‌مختصر زیر رجوع کند.

ساده‌ترین درخت از ریشه، تنه وتنها یك گره تشکیل شده است. ایدهٔ اصلی، ساختن درختهای دیگر از درختان با گرههای کمتر است. برای این‌منظور، همان‌طورکه درشکل ۵ (I) نشان می‌دهد، "شاخه‌های اصلی" هر درخت را به عنوان درختی (با گرههای کمتر) تصور می‌کنیم که به‌نقطهٔ انتهایی بالایی (تنها گره) تنه افزوده شده‌اند. بنابراین، همان‌گونه‌که بازهم شکل ۵ (I) نشان می‌دهد، می‌توانیم هر درخت را به‌عنوان جایگذاشت ساده‌ترین درخت و چندتصویر، که هریك از یك یا دو ویا تعدادی بیشتر درخت یکسان، تشکیل شده‌اند، تصور کنیم؛ به شباهت این با آخرین سطرشکل ۲ توجه کنید.

قسمت (II) شکل ۵ سری شکلی را نمایش می‌دهد: مجموع نامتناهی تمام درختهای گوناگون. روند تکوین این سری شبیه به سری شکلی شکل ۲، ولی پیچیده‌تر از آن است. درشکل ۲ حاصلضرب پنج سری "درواقع هندسی" را می‌بینیم؛ اما درشکل ۵ حاصلضرب یك سری نامتناهی "درواقع هندسی" را، که دریك جملهٔ اولیه (ساده‌ترین درخت، تنهٔ‌مشترك تمام درختان) ضرب شده‌اند، مشاهده می‌کنیم.

۱۰۳ قسمت (III) شکل ۵ نشان دهندهٔ جایگذاریی‌است‌که سری شکلی را به سری شمارنده مبدل می‌کند. با این جایگذاری هر سری "در واقع هندسی" که در شکل ۵ (II) به‌وجود آمده بود، به سری هندسی واقعی‌که مجموعش معلوم است تبدیل می‌شود، و کل روابطی‌که توسط شکل ۵ (II) نمایش داده شده‌اند به رابطهٔ مشهور کیلی مبدل می‌شود:

$$T_{1}x+T_{2}x^{2}+\dots+T_{n}x^{n}+\dots \qquad (8)$$
$$=x(1-x)^{-T_1}(1-x^{2})^{-T_2}\dots(1-x^{n})^{-T_n}\dots$$

۲۰۳ با بسط سمت راست‌معادلهٔ (۸) به‌توانهای x ومقایسهٔ ضرایب x^n دردوطرف، یك فرمول بازگشتی به‌دست می‌آوریم که عبارتی برحسب T_1، T_2، ...، T_{n-1} برای T_n $(n\geqslant 2)$ است. لازم است خواننده عملیات مربوط به حالات اول را انجام دهد و با محاسبات تحلیلی مقادیر T_n را برای $n\leqslant 5$، که قبلاً با تجربیات هندسی به‌دست آورده بود، اثبات کند.

مراجع

1. Cayley, A., *Collected Mathematical Papers,* 13 vol, Cambridge, 1889-1898.

2. Konig, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936.
3. Polya, G., Szegö, G, *Aufgaben und Lehrsatze aus der Analysis,* 2 vol, Berlin, 1925.
4. Polya, G., *Acta Mathematica,* **68** (1937), 145-254.
5. Polya, G., *Mathematics and Plausible Reasoning,* 2 vol, Princeton, 1954.

فون نویمان تنها شاگردی است که تا به‌حال مرا تهدید کرده است. او آدم بسیار سریع‌الانتقالی بود. زمانی در زوریخ برای شاگردان زبده سمیناری برپا شده بود که درآن من درس می‌دادم، و فون‌نویمان هم درآن شرکت‌می‌کرد. من قضیهٔ خاصی را بیان کردم و بعد گفتم که این قضیه تا به‌حال ثابت نشده و ممکن است اثباتش خیلی‌مشکل باشد. فون‌نویمان چیزی‌نگفت اما پنج دقیقه بعد دستش را بالا برد. وقتی به او اجازهٔ صحبت دادم، پای تخته سیاه آمد و اثبات قضیه را نوشت. از آن موقع به‌بعد من از فون‌نویمان می‌ترسیدم.

ژرژ پولیا